

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 24.02.2017
CLASA a XII-a****Subiectul I. (7 puncte)**

Fie $f : [a, b] \rightarrow [1, e]$, o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) cu

$$f'(x) > 0, \forall x \in (a, b). \text{ Să se arate că } (\exists) x_0 \in (a, b) \text{ astfel încât } \int_a^b \frac{1}{1+\ln^2 f(x)} dx \leq \frac{e-1}{f'(x_0)}.$$

prof. Violin Gorcea, Liceul Teoretic "Avram Iancu" Cluj-Napoca

Subiectul II. (7 puncte)

Fie (G, \cdot) grup.

- a) Dacă $\exists m, n \in \mathbb{N}^*$ prime între ele astfel încât $(xy)^m = (yx)^m$ și $(xy)^n = (yx)^n$
 $\forall x, y \in G$ atunci (G, \cdot) grup abelian.
- b) Dacă $a, b \in G, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, cu $a^2 = e, aba^{-1} = b^n$ atunci $b^{n^2-1} = e$.

prof. Anca Cristina Hodorogea, Inspectoratul Școlar Județean Cluj

Subiectul III. (7 puncte)

Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât funcția

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) \cdot (\sin 2x + 6 \cdot \sin x) \text{ să admită primitiva } G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = \frac{f(x)}{3 + \cos x}.$$

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca

Subiectul IV. (7 puncte)

$$\text{Se consideră funcția } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = e^{t^2}. \text{ Să se calculeze } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{\sin^2 x}.$$

prof. Adrian-Bogdan Mesesan, Școala Gimnazială „George Baritiu” Jucu de Sus